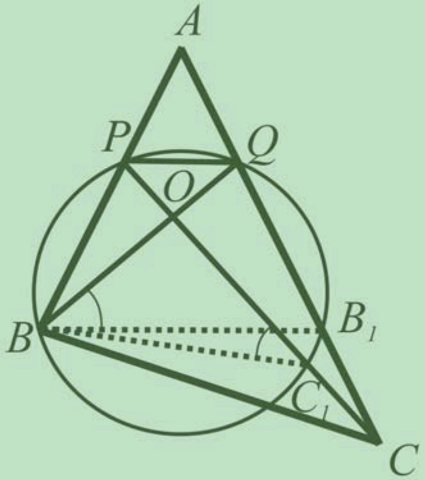
Б. С. Шугалов

Геометрическая задача как средство организации исследовательской деятельности учащихся



Кемерово 2018

Департамент образования и науки Кемеровской области
Кузбасский региональный институт повышения квалификации
и переподготовки работников образования

Б. С. Шугалов

Геометрическая задача как средство организации исследовательской деятельности учащихся

Кемерово 2018

УДК 372.851
ББК 74.262.215
Ш93

Рекомендовано
учебно-методическим советом
Кузбасского регионального института
повышения квалификации
и переподготовки работников образования

Автор

Б. С. Шугалов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно-научных и математических дисциплин КРИПКиПРО

Рецензенты:

В. Н. Бобриков, доктор педагогических наук, профессор, декан факультета фундаментальной подготовки ФГОБОУ ВО «Кузбасский технический университет»;

И. Л. Трель, учитель математики МБОУ «Лицей № 23», г. Кемерово;

Л. Е. Шмакова, кандидат педагогических наук, доцент, декан ФПК КРИПКиПРО

Шугалов, Б. С.

Ш93 **Геометрическая задача** как средство организации исследовательской деятельности учащихся [Текст] : методическое пособие / Б. С. Шугалов. – Кемерово : Изд-во КРИПКиПРО, 2018. – 100 с.

ISBN 978-5-7148-0621-6

Геометрия – часть математики, и как наука о закономерностях содержит разнообразные, простые по форме утверждения. Но сложны пути, приводящие к открытию общих свойств геометрических фигур и их доказательству, означающему включение найденного соотношения в состав геометрической теории. Представленный в пособии анализ решений интересных и поучительных задач, составляя методическое обеспечение исследовательской концепции обучения математике, направлен на вовлечение учащихся в математическую деятельность, развитие их исследовательских способностей, формирование представления о геометрии как системе знаний о свойствах геометрических фигур.

Пособие адресовано учителям и учащимся общеобразовательных организаций с профильным изучением предметов естественно-научного цикла, а также слушателям курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки.

УДК 372.851
ББК 74.262.215

ISBN 978-5-7148-0621-6

Предисловие

Необходимость включения исследовательской составляющей в процесс обучения математике диктуется не только представлениями о ценностях математического образования, но и тем обстоятельством, что достижение самих его целей невозможно без исследовательской активности обучающихся. Развитие исследовательских способностей выражается в умении совместно использовать общезначимые способы интеллектуальной деятельности, методы и частные приемы решения задач разного уровня сложности.

В пособии на многих примерах показано, как изменяется сложность решаемой задачи при изменении способа ее решения. И в таком представлении об относительной простоте отдельной задачи в составе геометрической теории проявляется сложность самой теории – системы знаний о свойствах геометрических фигур.

В материалах пособия раскрывается эвристическая роль чертежа. Выявление закономерных соотношений между компонентами выстраиваемой геометрической фигуры, определение пути обоснования сформулированного свойства, различные способы решения одной и той же задачи, постановка новых задач осуществляются во взаимодействии логической аргументации и наглядных представлений.

В первом разделе пособия рассмотрены объединенные общим чертежом три задачи. При решении первых двух – используются признаки равенства треугольников. В найденном решении третьей, наиболее сложной задачи, применен метод вспомогательной окружности.

Во втором разделе пособия задачи с неоднозначным ответом представлены двумя близкими по формулировке задачами на построение. Сопоставлены разные методы решения: метод двух геометрических мест точек и метод вспомогательных фигур.

Чертеж как источник различных задач выдвигается на первый план в третьем разделе пособия. На основе анализа определенной геометрической конструкции сформулировано и доказано свойство окружности, описанной около равнобедренной трапеции: окружность, описанная около равнобедренной трапеции, проходит через центр окружности, вписанной в фигуру, образованной продолжениями боковых сторон трапеции и отрезками ее диагоналей.

Ряд задач, при решении которых применяется метод вспомогательной окружности, разобран в четвертом разделе пособия. Представлены различные способы решения олимпиадной задачи на доказательство равенства площадей двух определенных фигур. Простое обобщение исходной задачи достигается при совместном рассмотрении ее частного и общего случаев.

Общее представление о расширении и интеграции математических знаний путем совместного рассмотрения взаимно-обратных утверждений конкретизируется в теме «Свойства и признаки прямоугольного треугольника» (пятый раздел пособия). Специальное исследование по теореме Пифагора вынесено в Приложение, в котором эта замечательная теорема элементарной геометрии обсуждается в связи с задачей о квадрате, равносоставленном двум данным.

В разделе «Равновеликие и равносоставленные многоугольники. Теорема Больяя – Гервина» приведены примеры возрастания сложности за счет усложнения геометрической конструкции (шестой раздел пособия). Анализируются тексты из литературных источников, популяризирующих научные достижения в области математики. В силу своей направленности, такие тексты могут не содержать полного рассмотрения затронутого вопроса. И в тех случаях, когда приводится только идея решения задачи или схема доказательства теоремы, открывается возможность использования такого материала в качестве средства для проведения проектно-исследовательской работы с учащимися.

Примеры применения алгебры к геометрии рассмотрены в седьмом разделе пособия. Представлен теоретический материал, обосновывающий использование координатно-векторного метода при решении стереометрических задач из типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ.

При решении геометрических задач, во взаимосвязи логических аргументов и наглядных представлений вырисовывается своеобразный узор, приводящий к логическому выводу неизвестного по данным задачи. В восьмом разделе пособия рассматривается ряд задач о взаимном расположении простейших геометрических фигур, способствующих развитию логического и критического мышления обучающихся.

Возможности эффективного использования представленного в пособии материала рассмотрены в лекциях, посвящённых целям и принципам обучения математике, на практических занятиях и геометрических семинарах, проводимых для учителей математики в Кузбасском региональном институте повышения квалификации и переподготовки работников образования.

Содержание разных разделов пособия стало основой для индивидуальной работы с учащимися 8–11 классов, включающей их подготовку к защите выбранных тем на научно-практических конференциях разного уровня. Их выступления отмечены призовыми местами.

1. Какая задача сложнее?
Четвертый признак равенства треугольников

В этом разделе пособия рассмотрены три связанные между собой задачи разных уровней сложности. Решение второй задачи упрощается, если применить дополнительный, так называемый четвертый признак равенства треугольников. На основе решения соответствующей задачи на построение даны различные формулировки этого признака. При решении третьей задачи (исходный чертеж к которой совпадает с чертежом ко второй!) применяются метод вспомогательной окружности и теорема о вписанном угле. Доказательство проводится методом от противного. Так возникающий на основе *простого чертежа вопрос мотивирует дальнейшее изучение геометрической теории.*

Задача 1. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X – середина основания BC. Докажите, что BQ = CP* [8, № 179].

Задача 2. *В треугольнике ABC точка P лежит на стороне AB, точка Q – на стороне AC, причем AP = AQ, BQ = CP. Можно ли утверждать, что треугольник ABC – равнобедренный* [16, № 29]?

Отметим, что в первой задаче, опираясь на равнобедренность заданного треугольника, нужно доказать равенство отрезков, соединяющих вершины основания с определенными точками боковых сторон треугольника. Во второй – ответить на обратный вопрос: следует ли из равенства соответствующих отрезков равнобедренность треугольника?

Решение задачи 1.

Рассмотрим треугольники *PBX* и *QCX* (рис. 1.1).

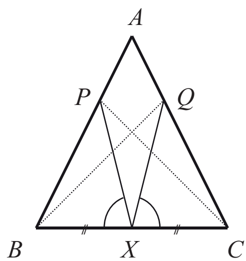


Рис. 1.1.

Они равны по стороне и прилежащим к ней углам: $BX = CX$, $\angle PXB = \angle QXC$ по условию и $\angle ABC = \angle ACB$ по свойству равнобедренного треугольника. Следовательно, $PB = QC$.

Рассмотрим другую пару треугольников: *BPC* и *CQB*. Они равны по двум сторонам и углу между ними: $PB = QC$ по доказанному, *BC* – общая сторона и $\angle ABC = \angle ACB$. Следовательно, $BQ = CP$, как соответствующие стороны равных треугольников.

Решение задачи 2.

Рассмотрим несколько случаев.

a) Угол *A* – прямой (рис. 1.2 *а*). В этом случае $\Delta\, ACP = \Delta\, ABQ$ по гипотенузе и катету, $BQ = CP$ и $AQ = AP$. Следовательно, равны и катеты *AB* и *AC*. Треугольник *ABC* – равнобедренный.

b) Угол *A* – тупой (рис. 1.2 *б*). Из точек *P* и *Q* проведем перпендикуляры *PM* и *QN* к прямым *AC* и *AB* соответственно.

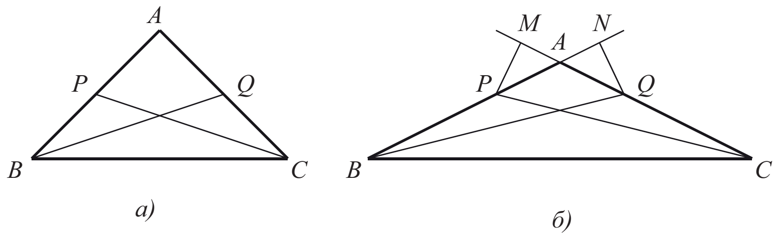


Рис. 1.2.

$\Delta\, APM = \Delta\, AQN$ по гипотенузе и острому углу, $AP = AQ$, $\angle PAM = \angle QAN$. Следовательно, равны и катеты этих треугольников: $PM = QN$, $AM = AN$. Прямоугольные треугольники BQN и CPM равны по гипотенузе и катету: $BQ = CP$, $PM = QN$. Следовательно, равны и катеты BN, CM. Вычитая из равных отрезков равные, $BN – AN = CM – AM$, получим $AB = AC$.

Аналогично равенство отрезков, $AB = AC$, доказывается для случая, когда угол A острый.

Итак, рассмотрев все возможные случаи, приходим к заключению: треугольник ABC – равнобедренный. При решении этой задачи можно использовать так называемый «четвертый признак равенства треугольников» [29, с. 62]. Чтобы *сформулировать* этот признак, решим следующую задачу на построение.

Постройте треугольник по двум сторонам b, c и углу β, прилежащему к одной из этих сторон.

Предположим, что задача решена, треугольник ABC – искомый (рис. 1.3, в соответствии с общепринятыми обозначениями, сторона b лежит против угла β).

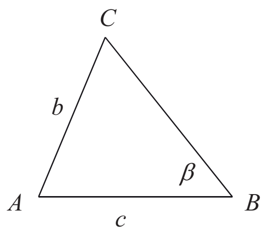


Рис. 1.3.

Рассматривая рисунок, выделяя на нем заданные величины, приходим к первому шагу построения: отложим отрезок c и обозначим его концы через A и B. Тем самым зафиксированы две вершины искомого треугольника; остается найти только одну вершину C. Неизвестная точка C принадлежит лучу BC, который можно построить, отложив на прямой AB угол ABK, равный данному углу β. И еще одно условие задачи: расстояние между точками A и C равно b, т. е.

точка C принадлежит окружности радиуса b с центром в A. Вершина C определяется, как пересечение луча BK и указанной окружности.

На рис. 1.4 и 1.5 по заданным величинам b, c и β выполнено построение треугольника, причем в первом случае задача имеет единственное решение, а во втором – два решения. Перейдем к полному исследованию задачи.

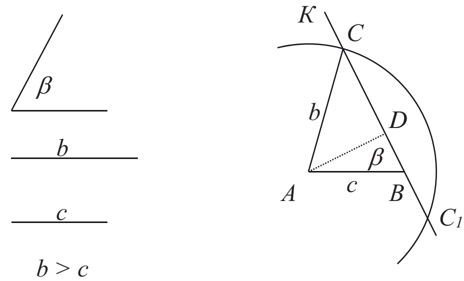


Рис. 1.4.

Рассмотрим случай, когда $\beta < 90°$. Пусть AD – расстояние от точки A до прямой BK; $AD = c \sin \beta$ (рис. 1.4). Если $b < c \sin \beta$, то, очевидно, окружность не пересекает прямую BK; задача не имеет решений. Если $b = c \sin \beta$, то окружность касается BK; задача имеет единственное решение.

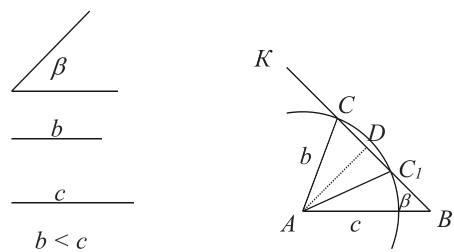


Рис. 1.5.

Если $b > c \sin \beta$, но $b < c$, то окружность пересекает луч BK в двух точках; задача имеет два решения (рис. 1.5). Если $b > c$, то окружность пересекает луч BK в одной точке; задача имеет единственное решение (рис. 1.4). Очевидно, задача имеет единственное решение, если $b = c$.

В случае $\beta \geq 90°$, как нетрудно убедиться, если $b > c$, то задача имеет единственное решение, а если $b \leq c$, то решений нет.

Результаты исследования сведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

	$b > c$	$b = c$	$c \sin \beta < b < c$	$b = c \sin \beta$	$b < c \sin \beta$
β – острый	1	1	2	1	0
	$b > c$	$b \leq c$			
β – прямой	1	0	0	0	0
β – тупой	1	0	0	0	0

Две последние строки таблицы можно объединить в одну. Им соответствует случай, когда угол β не является острым, и значит, β – наибольший угол треугольника. Сторона b лежит против угла β. Так как против б**о**льшего угла треугольника лежит б**о**льшая сторона, то должно выполняться неравенство $b > c$, и задача имеет единственное решение (таблица 1, первый столбец). Приходим к формулировке четвертого признака равенства треугольников.

Если в треугольниках $A_1B_1C_1$ и ABC *имеют место равенства* $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, *причем указанные углы не являются острыми, то эти треугольники равны* [29, с. 62].

Применим этот признак к решению задачи 2 (рис. 1.6).

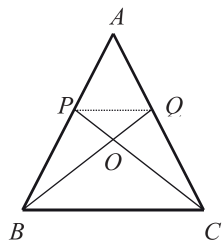


Рис. 1.6.

$\Delta\, BPQ = \Delta\, CQP$, так как PQ их общая сторона, $BQ = CP$, по условию, и равные углы BPQ и CQP – тупые (как смежные углы для углов при основании равнобедренного треугольника APQ). Следовательно, $BP = CQ$, а значит, $AB = BP + AP = CQ + AQ = AC$. Треугольник ABC – равнобедренный.

Итак, возвращение к ранее решенной задаче 2, рассмотрение ее с новых позиций (применение дополнительного признака равенства треугольников) приводит к другому, более простому способу решения задачи.

Другая формулировка четвертого признака равенства треугольников.

Используя результаты исследования (табл. 1, первый столбец), можно дать более широкую формулировку четвертого признака равенства треугольников (угол β может быть и острым).

Если две стороны и угол, прилежащий к меньшей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Содержание